Tentamen Lineaire Algebra, maandag 7 februari 2005

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Voor een gegeven geheel getal n is $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle polynomen van graad hoogstens n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van $P_n(\mathbb{R})$.

b. Bepaal de dimensie van $P_n(\mathbb{R})$.

Een polynoom $p(x)$ heet *even* indien voor all x geldt $p(x) = p(-x)$. Laat $E_n(\mathbb{R})$ de deelverzameling van $P_n(\mathbb{R})$ zijn bestaande uit de even polynomen van graad hoogstens n.

c. Laat zien dat $E_n(\mathbb{R})$ een deelruimte is van $P_n(\mathbb{R})$.

d. Neem nu $n = 6$. Bepaal een basis van $E_6(\mathbb{R})$.

e. Bepaal de de dimensie van $E_6(\mathbb{R})$.

2. Stel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle $n \times n$ matrices met reële componenten.

a. Wat is de dimensie van $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

b. Definieer de afbeelding $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ door

$$T(M) = \frac{1}{2}(M^t - M)).$$

Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

c. Toon aan: $M \in N(T)$ dan en slechts dan als M is symmetrisch.

Stel in de rest van dit probleem $n = 2$. Laat $\beta = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ de natuurlijke basis zijn van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

d. Bepaal de matrix $[T]_\beta$ van T ten opzichte van de basis β.

e. Bepaal de rang van T.

f. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(T)$.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de rang van A.

b. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.

c. Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$.

d. Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

c. Ga na of A diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 22
Vraagstuk 2: 24
Vraagstuk 3: 22
Vraagstuk 4: 22